Конденсат Бозе-Эйнштейна с ненулевым угловым моментом во внешнем гравитационном потенциале

Кафедра физики частиц и космологии физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова

Студент 243М группы:
Дмитриев Антон Сергеевич

Научный руководитель:
Кандидат физ. мат. наук
Панин Александр Григорьевич

Цели и задачи

- Сравнить результаты с асимптотикой при $L \gg 1$

- Модификации:
  1)Внешний гравитационный потенциал
  2)Самодействие: $\lambda\varphi^4$

Система уравнений

Уравнения Гросса-Питаевского и Пуассона:

$$i\partial_t \psi = -\frac{\Delta\psi}{2m} + \left(m(U + U_{ext}) + \frac{\lambda|\psi|^2}{8m^2} \right) \psi \ , \quad (1)$$

$$\Delta U = 4\pi m G |\psi|^2 \qquad (2)$$

где $\quad U_{ext} = -GM_{ext}/r$

Сохраняющиеся величины

$$M \equiv mN = m \int d^3\mathbf{x}\, |\psi|^{\mathbf{2}} \qquad (3)$$

$$E = \int d^3\mathbf{x} \left[\frac{|\nabla\psi|^2}{2m} + m\left(\frac{U}{2} + U_{ext}\right)|\psi|^2 + \frac{\lambda|\psi|^4}{16m^2} \right] \qquad (4)$$

$$J_z = -i \int d^3\mathbf{x}\, \psi^* \partial_\varphi \psi \qquad (5)$$

Подстановка

Вращающуюся Бозе-звезду с угловым моментом l можно определить как стационарное и осесимметричное решение системы (1), (2) в цилиндрической системе координат.

$$\psi_s(\mathbf{x}) = \psi_s(\rho, z)\, \mathrm{e}^{-i\omega_s t + il\varphi} \tag{6}$$

$$\omega_s \psi_s = -\frac{\Delta\psi_s}{2m} + \left(m(U_s + U_{ext}) + \frac{\lambda|\psi_s|^2}{8m^2} \right) \psi_s \qquad (7)$$

Где: $\Delta\psi_s \equiv \partial_z^2\psi_s + \rho^{-1}\partial_\rho(\rho\partial_\rho\psi_s) - l^2\psi_s/\rho^2$

$U = U_s(\rho, z)$

С граничными условиями:

$$\psi_s(0, z) = 0 \qquad \psi_s(\infty, z) = \psi_s(\rho, \infty) = 0$$

Масштабирование

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}/mv_0,\ t = \tilde{t}/mv_0^2$$
$$\omega_s = mv_0^2\tilde{\omega}_s,\ \psi = v_0^2(m/G)^{1/2}\tilde{\psi},\ U = v_0^2\tilde{U} \qquad (8)$$

Уравнение (3) примет вид:

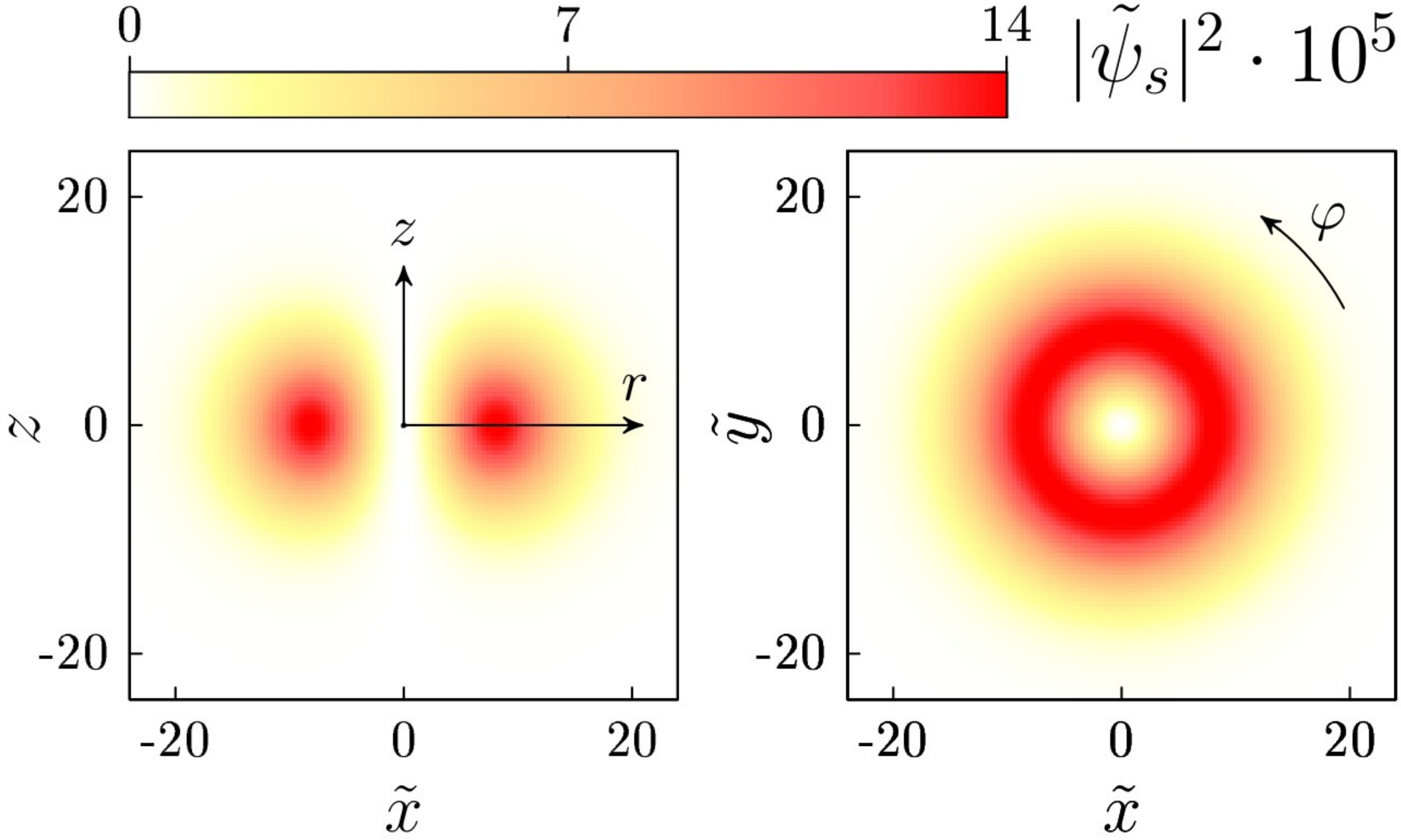
$$M = \frac{v_0}{mG}\int d^3\tilde{x}\,|\tilde{\psi}|^2 = \frac{v_0}{mG}\tilde{M} \qquad (9)$$

Выбирая: $v_0 = mGM \quad \tilde{M} = 1$

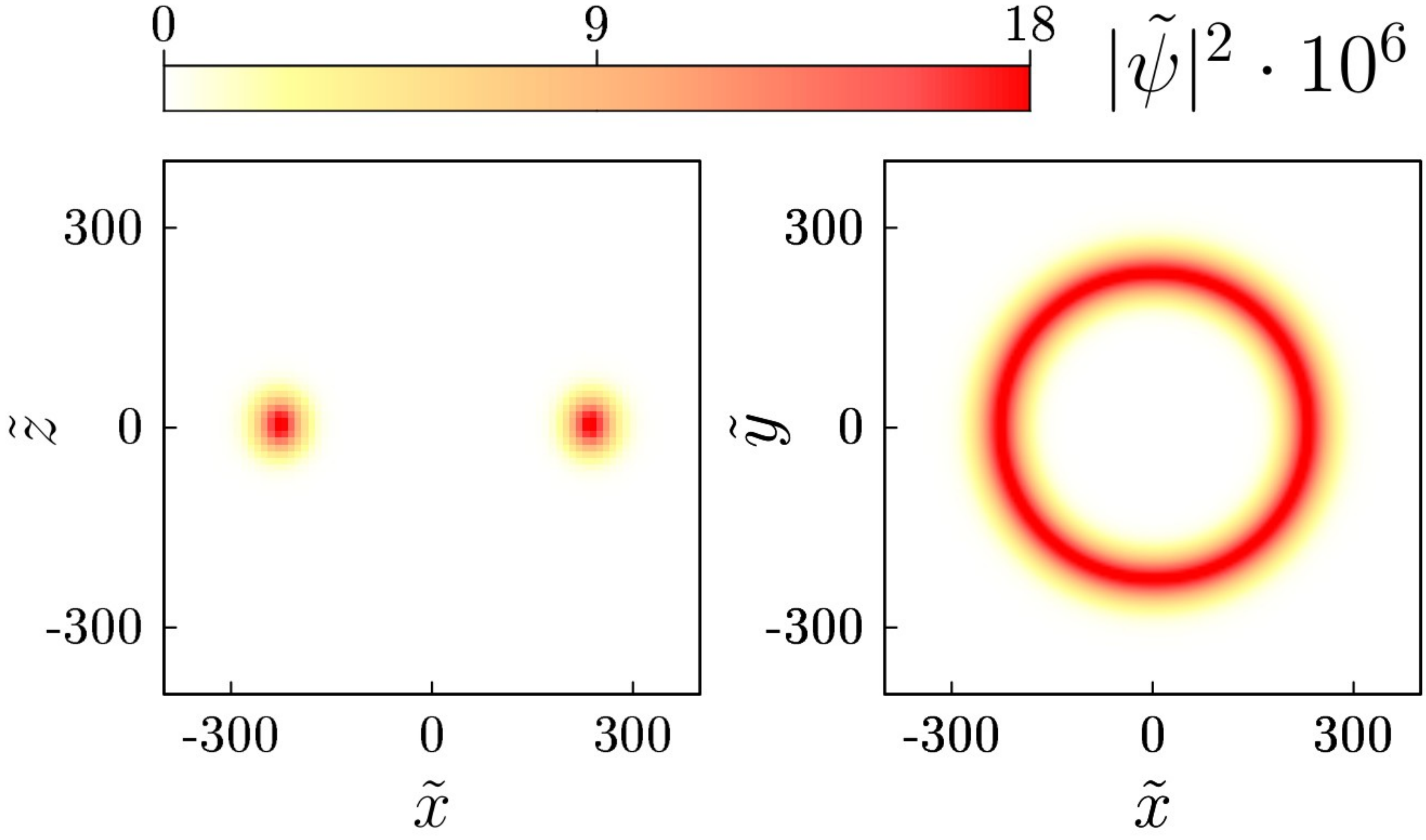
Тогда: $\tilde{\lambda} = \lambda G M^2 \qquad \tilde{M}_{ext} = M_{ext}/M$

$$E_s = \tilde{E}_s\, m^2 G^2 M_s^3 \qquad (10)$$

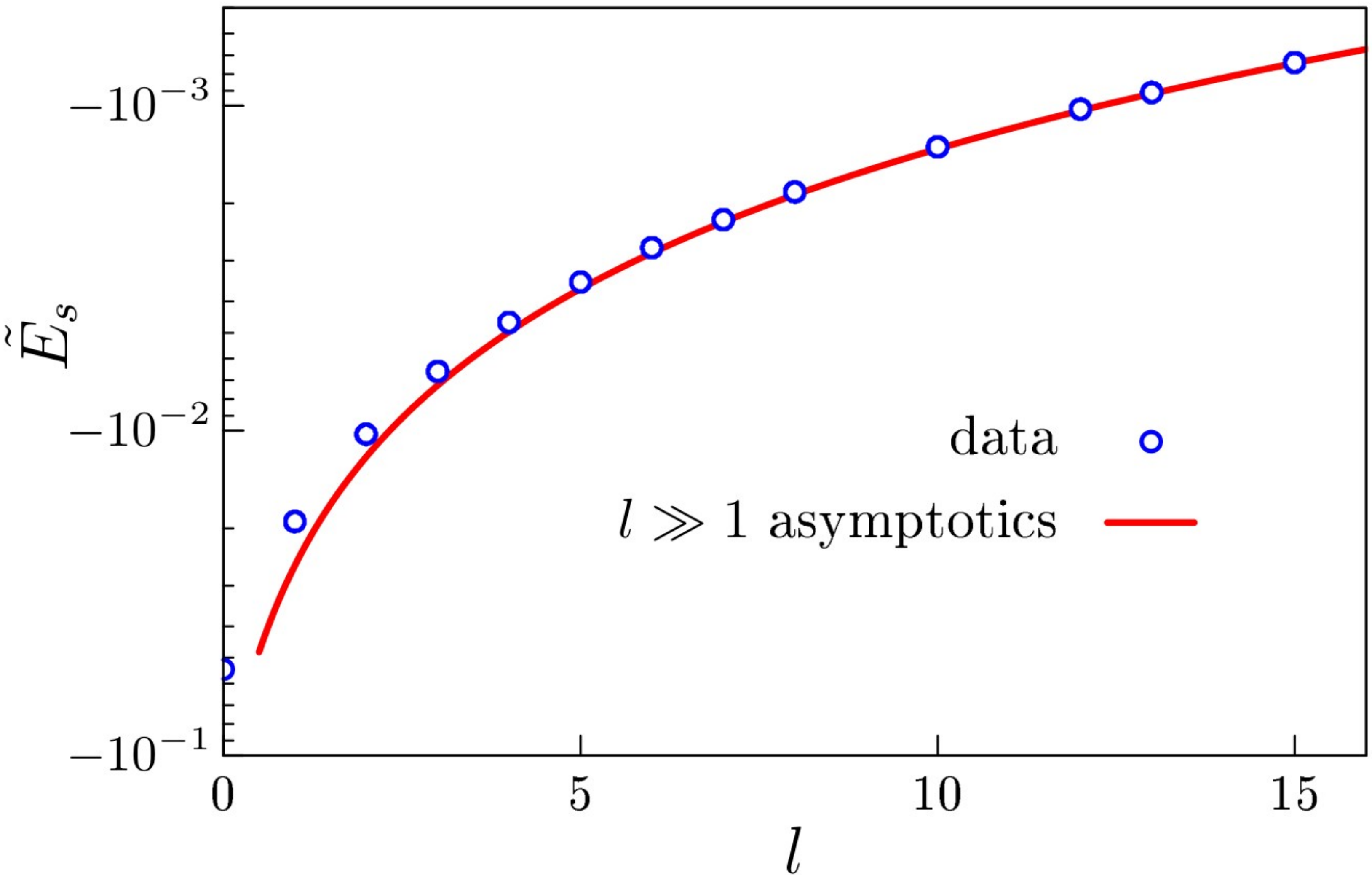
Бозе-звезда с l=1



Бозе-звезда l=10



Энергия



Бозе-звезды — экстремум функционала

$$F \equiv E - \omega_s N$$

Удобно переписать энергию (4)

$$E = \int d^3\mathbf{x}\left[\frac{|\nabla\psi|^2}{2m} + \Big(m(U + U_{ext}) + \lambda u\Big)|\psi|^2 + \frac{(\nabla U)^2}{8\pi G} - 4\lambda m^2 u^2\right] \qquad (11)$$

$$\Delta U = 4\pi G m|\psi|^2 \qquad u = |\psi|^2/8m^2 \qquad (12)$$

Запрещающая теорема ($\lambda \leq 0$)

Введем вспомогательный инструмент:

$$\omega_L \Psi_L = -\frac{\Delta \Psi_L}{2m} + \Big(m(U_s + U_{ext}) + \lambda u_s \Big) \Psi_L \qquad (15)$$

$$\int d^3\mathbf{x} \, |\Psi_L|^2 = 1$$

1) $L = l \quad w_l = w_s$

2) $$\omega_s - \omega_0 \geq \int d^3\mathbf{x} \, \frac{l^2 \, |\Psi_l|^2}{2mr^2} > 0 \, , \qquad (16)$$

3) $L \to \infty \quad (U_s + U_{ext}) \to -G(M + M_{ext})/|\mathbf{x}|$

$$\omega_L \approx -m^3 G^2 (M + M_{ext})^2 (L+1)^{-2}/2 \sim O(L^{-2}) \text{ при } L \gg 1.$$

Построим возмущение так, чтобы:

$$dN_s = dN_0 + dN_L \qquad l\, dN_s = L\, dN_L \tag{17}$$

Волновая функция будет иметь вид:

$$\psi_s' \to \psi = \psi_s(\mathbf{x}) + dN_0^{1/2}\, \Psi_0(\mathbf{x}) + dN_L^{1/2}\, \Psi_L(\mathbf{x}) \tag{18}$$

С одной стороны: $E_f = E_s + \omega_0 dN_0 + \omega_L dN_L$

С другой: $E_s' = E_s + \omega_s dN_s + O(dN_s^2)$

$$\boxed{E_f - E'_s = (\omega_0 - \omega_s) dN_s + O(L^{-1})\, dN_s < 0}$$

Где dN_0 и dN_L были выражены из равенств (17) и учтено, что $\omega_L = O(L^{-2})$, где последнее неравенство вытекает из неравенства (16)

Таким образом построенная конфигурация имеет меньшую энергию.

Линейный анализ нестабильностей при произвольном l. (λ=0, U_{ext}=0)

Рассмотрим возмущения следующего вида:

$$\psi = \left[\psi_s(r,\ z) + \delta\psi_1\,\mathrm{e}^{i\Delta l\varphi} + \delta\psi_2\,\mathrm{e}^{-i\Delta l\varphi}\right]\mathrm{e}^{-i\omega_s t + il\varphi}\ ,$$
$$U = U_s(r,\ z) + \delta U\,\mathrm{e}^{i\Delta l\varphi} + \delta U^*\mathrm{e}^{-i\Delta l\varphi}\ , \qquad (19)$$

Подставляя в систему (1),(2), получим:

$$(\omega_s + i\partial_t)\delta\psi_1 = -\frac{\Delta_{r,z}\delta\psi_1}{2m} + m\psi_s\delta U + \left[\frac{(l+\Delta l)^2}{2mr^2} + mU_s\right]\delta\psi_1\ ,$$
$$(\omega_s + i\partial_t)\delta\psi_2 = -\frac{\Delta_{r,z}\delta\psi_2}{2m} + m\psi_s\delta U^* + \left[\frac{(l-\Delta l)^2}{2mr^2} + mU_s\right]\delta\psi_2\ , \qquad (20)$$
$$\Delta_{r,z}\delta U - \frac{\Delta l^2}{r^2}\delta U = 4\pi mG\left(\psi_s^*\delta\psi_1 + \psi_s\delta\psi_2^*\right)\ ,$$

Будем искать экспоненциально растущие моды:

$$\delta\psi_1,\ \delta\psi_2^*,\ \delta U \propto \mathrm{e}^{\mu t} \qquad \text{с} \qquad \mathrm{Re}\,\mu > 0$$

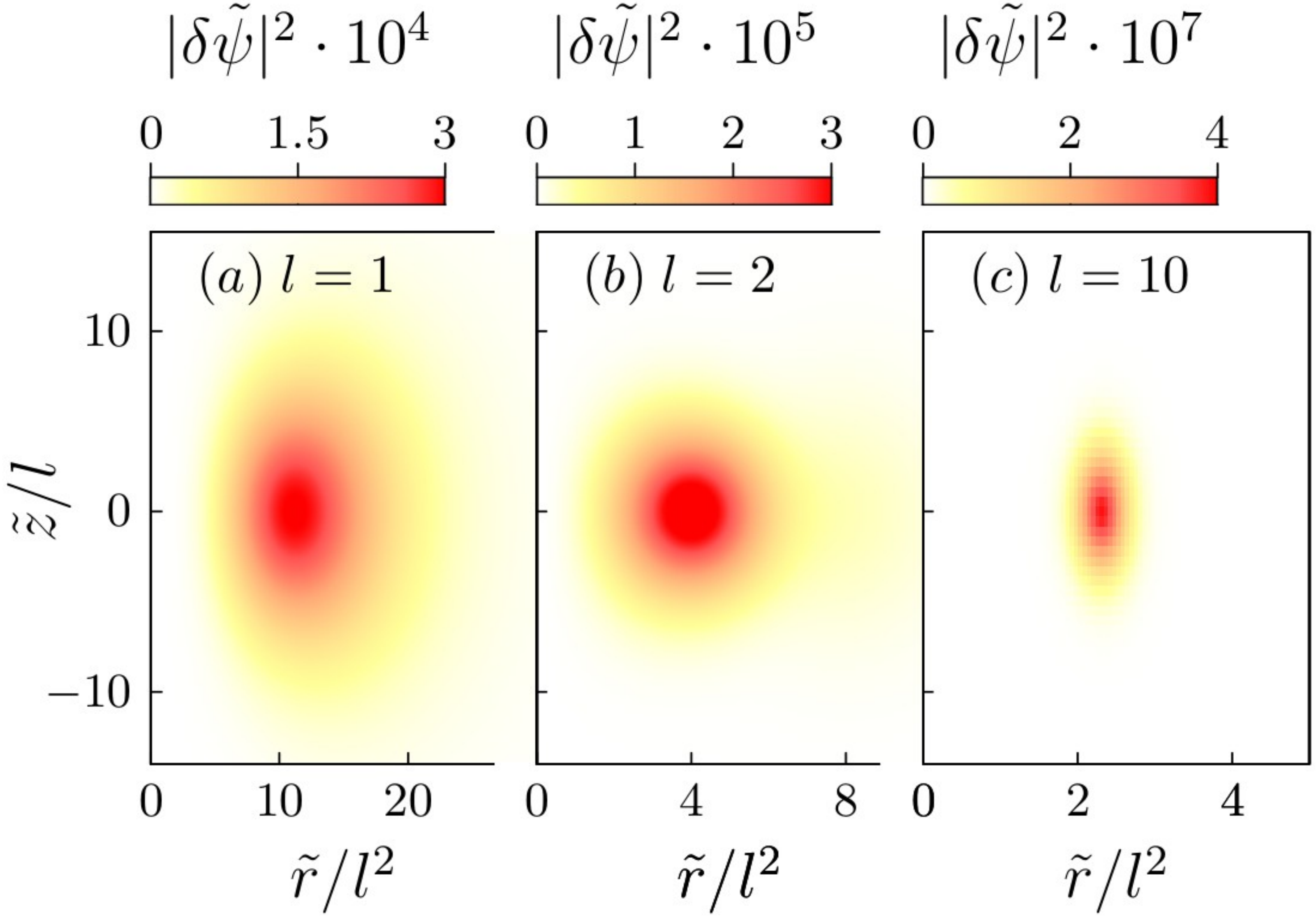
В численных расчетах удобно держать возмущения конечными, и мы делим их на каждом шаге на комплексный коэффициент $\Delta\mathcal{N}$. Тогда:

$$\mu = \Delta t^{-1} \ln \Delta\mathcal{N}.$$

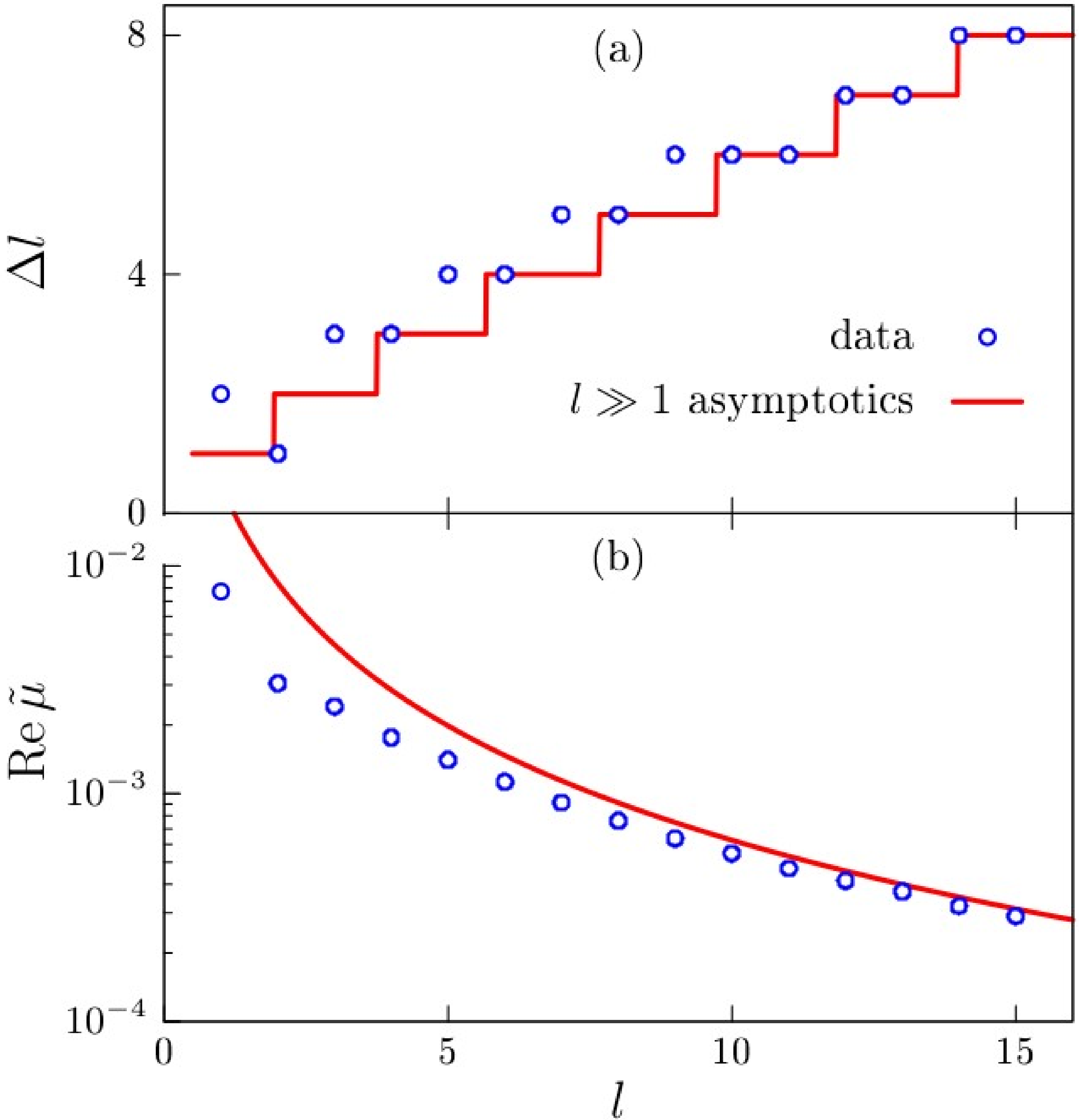
Используя масштабирование (8)

$$\mu = \tilde{\mu}\, m^3 G^2 M_s^2$$

Возмущения

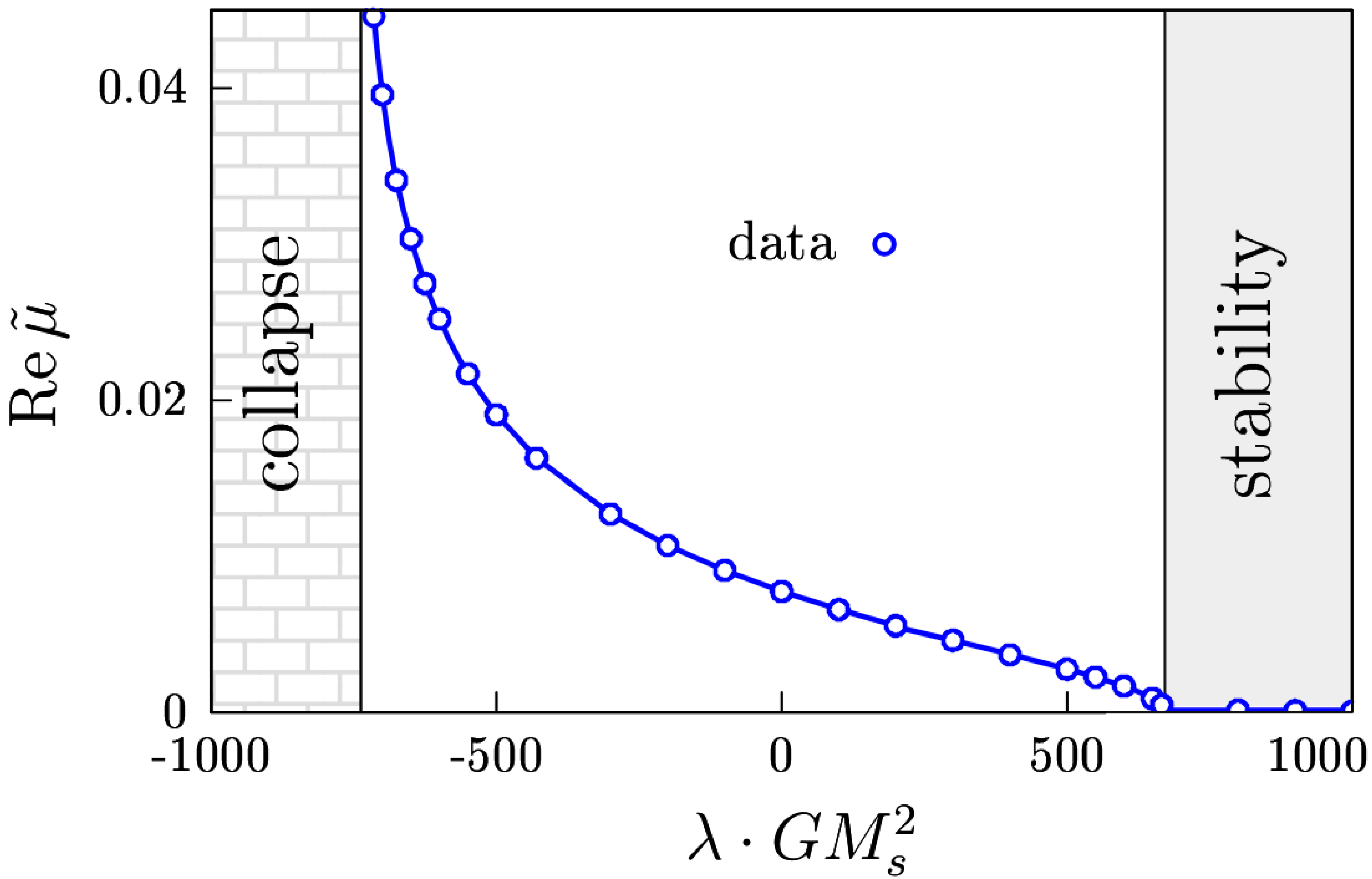


$|\delta\tilde{\psi}|^2 \cdot 10^4$
0
1.5
3
$|\delta\tilde{\psi}|^2 \cdot 10^5$
0
1
2
3
$|\delta\tilde{\psi}|^2 \cdot 10^7$
0
2
4
$(a)\ l = 1$
$(b)\ l = 2$
$(c)\ l = 10$
$\tilde{z}/l$
10
0
-10
0
10
20
0
4
8
0
2
4
$\tilde{r}/l^2$
$\tilde{r}/l^2$
$\tilde{r}/l^2$

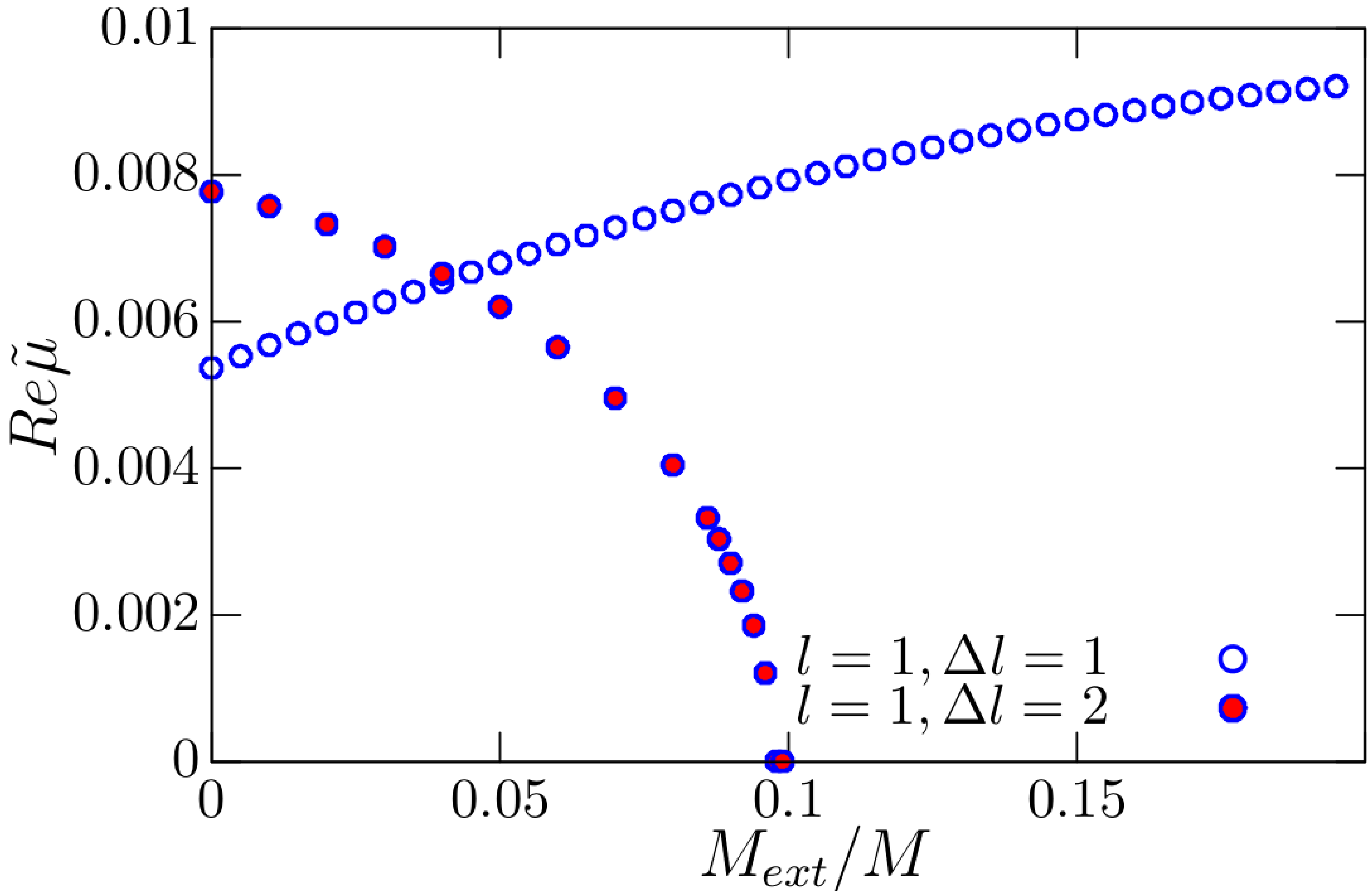


(a)
(b)
8
4
0
Δl
data
$l \gg 1$ asymptotics
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
$\mathrm{Re}\,\tilde{\mu}$
0
5
10
15
l

Линейный анализ нестабильностей при l=1. ($\lambda \neq 0$, $U_{ext}=0$)



Линейный анализ нестабильностей l=1. ($\lambda=0$, $U_{ext}\neq0$)



Результаты

1) Аналитически доказана теорема нестабильности вращающихся Бозе-звезд во внешнем гравитационном потенциале при параметре самодействия $\lambda \leq 0$.

2) Вычислены показатели роста доминирующих мод нестабильности.

3) Показано, что звезды с l=1 являются стабильными при достаточно сильном отталкивающем самодействии $\lambda > \lambda_0$.